4章　微分方程式

§2　2階微分方程式　(p.127〜p.128)

練習問題 2-A

1. （1）　特性方程式 $\lambda^2-2\lambda-4=0$ を解くと

$$\lambda=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-4)}}{1}$$
$$=1\pm\sqrt{5}$$

よって

$$\boldsymbol{x=C_1e^{(1+\sqrt{5})t}+C_2e^{(1-\sqrt{5})t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

（2）　特性方程式 $\lambda^2-8\lambda+16=0$ を解くと，$\lambda=4$

よって

$$\boldsymbol{x=(C_1+C_2t)e^{4t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

（3）　特性方程式 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ を解くと，$\lambda=-1$，-2 であるから，斉次の場合の一般解は

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を

$x=At^2+Bt+C$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt}=2At+B$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=2A$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$2A+3(2At+B)+2(At^2+Bt+C)=t^2-t$$
$$2At^2+(6A+2B)t+(2A+3B+2C)=t^2-t$$

よって

$$\begin{cases}2A=1\\6A+2B=-1\\2A+3B+2C=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-2$，$C=\dfrac{5}{2}$

したがって，1 つの解は

$$x=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{5}{2}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{5}{2}+C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

与えられた微分方程式は

$$(D^2+3D+2)x=t^2-t$$

と表せるので

$$x=\frac{1}{D^2+3D+2}(t^2-t)$$

山辺の方法を用いると

$$\begin{array}{r|rrr}
 & \frac{1}{2}t^2 & -2t & +\frac{5}{2}\\ \hline
2+3D+D^2 & t^2 & -t & \\
 & t^2 & +3t & +1\\ \hline
 & & -4t & -1\\
 & & -4t & -6\\ \hline
 & & & 5\\
 & & & 5\\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

よって，$x=\dfrac{1}{2}t^2-2t+\dfrac{5}{2}$

〔または〕

$$x=\frac{1}{D^2+3D+2}(t^2-t)$$
$$=\frac{1}{(D+2)(D+1)}(t^2-t)$$
$$=\frac{1}{2\left(1+\frac{D}{2}\right)(1+D)}(t^2-t)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{D}{2}\right)}(1-D+D^2+\cdots)(t^2-t)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{D}{2}\right)}\{(t^2-t)-(2t-1)+2\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{D}{2}\right)}(t^2-3t+3)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\cdots\right)(t^2-3t+3)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(t^2-3t+3)-\frac{1}{2}(2t-3)+\frac{1}{4}\cdot 2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-4t+5)$$
$$=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{5}{2}$$

（4）　特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+13=0$ を解くと

$$\lambda=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 13)}}{1}$$
$$=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$

よって，斉次の場合の一般解は

$$x=e^{2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$$

(C_1，C_2は任意定数)

与えられた微分方程式の 1 つの解を

$x=Ae^{2t}$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = 2Ae^{2t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4Ae^{2t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$4Ae^{2t} - 4\cdot 2Ae^{2t} + 13Ae^{2t} = e^{2t}$$
$$9Ae^{2t} = e^{2t}$$

よって，$9A = 1$ より，$A = \dfrac{1}{9}$

したがって，1 つの解は

$$x = \frac{1}{9}e^{2t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{9}e^{2t} + e^{2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

与えられた微分方程式は

$$(D^2 - 4D + 13)x = e^{2t}$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2 - 4D + 13}e^{2t}$$
$$= \frac{1}{2^2 - 4\cdot 2 + 13}e^{2t}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{9}e^{2t}}$$

（5） 特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ を解くと，$\lambda = -1,\ 3$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

e^{-t} は，斉次の場合の一般解に含まれるから，与えられた微分方程式の 1 つの解を

$x = Ate^{-t}$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = A(e^{-t} - te^{-t}) = A(1-t)e^{-t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\{-e^{-t} - (1-t)e^{-t}\}$$
$$= A(t-2)e^{-t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$A(t-2)e^{-t} - 2A(1-t)e^{-t} - 3Ate^{-t} = e^{-t}$$
$$-4Ae^{-t} = e^{2t}$$

よって，$-4A = 1$ より，$A = -\dfrac{1}{4}$

したがって，1 つの解は

$$x = -\frac{1}{4}te^{-t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{4}te^{-t} + C_1e^{-t} + C_2e^{3t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

与えられた微分方程式は

$$(D^2 - 2D - 3)x = e^{-t}$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2 - 2D - 3}e^{-t}$$
$$= e^{-t}\frac{1}{(D-1)^2 - 2(D-1) - 3}$$
$$= e^{-t}\frac{1}{D^2 - 4D}$$
$$= e^{-t}\frac{1}{D(D-4)}$$
$$= e^{-t}\frac{1}{-4D\left(1 - \dfrac{D}{4}\right)}$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-t}\frac{1}{D}\left(1 + \frac{D}{4} + \cdots\right)$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-t}\frac{1}{D}$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-t}t = -\frac{1}{4}te^{-t}$$

（6） 特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと，$\lambda = \pm i$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t$$

(C_1，C_2は任意定数)

$\cos t$ は，斉次の場合の一般解に含まれるから，与えられた微分方程式の 1 つの解を

$x = t(A\cos t + B\sin t)$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = (A\cos t + B\sin t) + t(-A\sin t + B\cos t)$$
$$= (A + Bt)\cos t + (-At + B)\sin t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = B\cos t - (A + Bt)\sin t - A\sin t + (-At + B)\cos t$$
$$= (-At + 2B)\cos t - (2A + Bt)\sin t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$(-At + 2B)\cos t - (2A + Bt)\sin t + t(A\cos t + B\sin t) = 2\cos t$$
$$2B\cos t - 2A\sin t = 2\cos t$$

よって，$-2A = 0$，$2B = 2$ であるから，$A = 0$，$B = 1$

したがって，1 つの解は

$$x = t\sin t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = t\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

与えられた微分方程式は

$$(D^2+1)x=2\cos t$$

と表せるので

$$x=\frac{2}{D^2+1}\cos t$$
$$=\frac{2}{1^2+1}t\sin t$$
$$=t\sin t$$

2. 2 式を上から①，②とする．

① より，$y=-\dfrac{dx}{dt}+x+t^2\cdots$①$'$

①$'$ を t で微分すると

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2t$$

これらを②に代入すると

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2t=2x-\left(-\frac{dx}{dt}+x+t^2\right)+t^2-t$$

整理すると，$\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=3t\cdots$③

③の特性方程式 $\lambda^2+1=0$ を解くと，$\lambda=\pm i$

よって，一般解は，$x=C_1\cos t+C_2\sin t$

(C_1，C_2は任意定数)

③の 1 つの解を，$x=At+B$ と予想すると

$$\frac{dx}{dt}=A$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

よって，$0+At+B=3t$ であるから，$A=3$，$B=0$

したがって，$x=3t$

以上より，x の一般解は

$$x=3t+C_1\cos t+C_2\sin t$$

これより，$\dfrac{dx}{dt}=3-C_1\sin t+C_2\cos t$

これらを，①$'$ に代入して

$$y=-(3-C_1\sin t+C_2\cos t)+(3t+C_1\cos t+C_2\sin t)+t^2$$
$$=t^2+3t-3+(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=3t+C_1\cos t+C_2\sin t}\\ \boldsymbol{y=t^2+3t-3}\\ \qquad\boldsymbol{+(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t}\end{cases}$$

(C_1，C_2は任意定数)

3. （1） x_1 は，$L(x)=3t$ の解なので

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-4\frac{dx_1}{dt}+3x_1=3t$$

また，x_2 は，$L(x)=\sin t$ の解なので

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}-4\frac{dx_2}{dt}+3x_2=\sin t$$

よって

$$L(x_1+x_2)$$
$$=\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)-4\frac{d}{dt}(x_1+x_2)+3(x_1+x_2)$$
$$=\frac{d^2x_1}{dt^2}-4\frac{dx_1}{dt}+3x_1+\frac{d^2x_2}{dt^2}-4\frac{dx_2}{dt}+3x_2$$
$$=3t+\sin t$$

したがって，x_1+x_2 は，$L(x)=3t+\sin t$ の 1 つの解である．

（2）$L(x)=3t+\sin t$ の特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+3=0$ を解くと，$\lambda=1,\ 3$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x=C_1e^t+C_2e^{3t}$$

(C_1，C_2は任意定数)

$L(x)=3t$ の 1 つの解を，$x_1=At+B$ と予想すると

$$\frac{dx_1}{dt}=A$$
$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0$$

これらを方程式に代入すると

$$0-4A+3(At+B)=3t$$
$$3At+(-4A+3B)=3t$$

よって

$$\begin{cases}3A=3\\ -4A+3B=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=1$，$B=\dfrac{4}{3}$

したがって，$x_1=t+\dfrac{4}{3}$

$L(x)=\sin t$ の 1 つの解を，$x_2=A\cos t+B\sin t$ と予想すると

$$\frac{dx_2}{dt}=-A\sin t+B\cos t$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=-A\cos t-B\sin t$$

これらを方程式に代入すると

$$-A\cos t-B\sin t-4(-A\sin t+B\cos t)+3(A\cos t+B\sin t)=\sin t$$
$$(2A-4B)\cos t+(4A+2B)\sin t=\sin t$$

よって

$$\begin{cases}2A-4B=0\\ 4A+2B=1\end{cases}$$

これを解いて，$A=\dfrac{1}{5}$，$B=\dfrac{1}{10}$

したがって，$x_2=\dfrac{1}{5}\cos t+\dfrac{1}{10}\sin t$

以上より

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ &= \boldsymbol{t + \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t} \\ &\qquad \boldsymbol{+ C_1 e^t + C_2 e^{3t}} \end{aligned}$$

〔特殊解の求め方の別解〕

$L(x) = 3t$ は，$(D^2 - 4D + 3)x = 3t$ と表せる．

山辺の方法を用いると

$$\begin{array}{r|l} & t + \frac{4}{3} \\ \hline 3 - 4D + D^2 & 3t \\ & 3t - 4 \\ \hline & \quad\;\; 4 \\ & \quad\;\; 4 \\ \hline & \quad\;\; 0 \end{array}$$

または

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2 - 4D + 3} 3t \\ &= \frac{1}{(D-1)(D-3)} 3t \\ &= \frac{1}{3(1-D)\left(1 - \dfrac{D}{3}\right)} 3t \\ &= \frac{1}{(1-D)} \left(1 + \frac{D}{3} + \cdots\right) t \\ &= \frac{1}{(1-D)} \left(t + \frac{1}{3} \cdot 1\right) \\ &= (1 + D + D^2 + \cdots) \left(t + \frac{1}{3}\right) \\ &= t + \frac{1}{3} + 1 = t + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$L(x) = \sin t$ は，$(D^2 - 4D + 3)x = \sin t$ と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2 - 4D + 3} \sin t \\ &= \frac{1}{(D^2 + 3) - 4D} \sin t \\ &= \frac{(D^2 + 3) + 4D}{(D^2 + 3)^2 - 16D^2} \sin t \\ &= \frac{(-1 + 3) + 4D}{(-1 + 3)^2 - 16 \cdot (-1)} \sin t \\ &= \frac{2 + 4D}{20} \sin t \\ &= \frac{1}{10}(1 + 2D)\sin t \\ &= \frac{1}{10}(\sin t + 2\cos t) \\ &= \frac{1}{10}\sin t + \frac{1}{5}\cos t \end{aligned}$$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + \dfrac{k}{m} = 0$ を解くと，$\dfrac{k}{m} > 0$ であるから，$\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, i$

よって，一般解は

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \cdots ①$$

(C_1，C_2は任意定数)

これより

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \\ &\qquad + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \cdots ② \end{aligned}$$

①に，$t = 0$，$x = 0$ を代入して

$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$，すなわち，$C_1 = 0$

②に，$t = 0$，$\dfrac{dx}{dt} = v_0$ を代入して

$$v_0 = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin 0 + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos 0$$

$v_0 = C_2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，すなわち，$C_2 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\, v_0$

以上より，$\boldsymbol{x = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\, v_0 \sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t}$

練習問題 2-B

1. （1） 特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと，$\lambda = \pm i$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

(C_1，C_2は任意定数)

与えられた微分方程式の 1 つの解を

$x = A\cos(2t + 1) + B\sin(2t + 1)$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = -2A\sin(2t + 1) + 2B\cos(2t + 1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A\cos(2t + 1) - 4B\sin(2t + 1)$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} &-4A\cos(2t + 1) - 4B\sin(2t + 1) \\ &\qquad + \{A\cos(2t + 1) + B\sin(2t + 1)\} \\ &\qquad\qquad = \sin(2t + 1) \end{aligned}$$

$$-3A\cos(2t + 1) - 3BA\sin t = \sin(2t + 1)$$

よって，$-3A = 0$，$-3B = 1$ であるから，$A = 0$，$B = -\dfrac{1}{3}$

したがって，1 つの解は

$$x = -\frac{1}{3}\sin(2t+1)$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}\sin(2t+1) + C_1\cos t + C_2\sin t}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

与えられた微分方程式は

$$(D^2+1)x = \sin(2t+1)$$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2+1}\sin(2t+1) \\ &= \frac{1}{-4+1}\sin(2t+1) \\ &= -\frac{1}{3}\sin(2t+1) \end{aligned}$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2-1=0$ を解くと，$\lambda=\pm 1$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

$e^{t+2}=e^2e^t$ は，斉次の場合の一般解に含まれるから，与えられた微分方程式の 1 つの解を

$x = Ate^{t+2}$ と予想する．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(e^{t+2}+te^{t+2}) \\ &= A(t+1)e^{t+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= A\{e^{t+2}+(t+1)e^{t+2}\} \\ &= A(t+2)e^{t+2} \end{aligned}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$A(t+2)e^{t+2} - Ate^{t+2} = e^{t+2}$$

$$2Ae^{t+2} = e^{t+2}$$

よって，$A=1$ であるから，$A=\dfrac{1}{2}$

したがって，1 つの解は

$$x = \frac{1}{2}te^{t+2}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}te^{t+2} + C_1e^t + C_2e^{-t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

与えられた微分方程式は

$$(D^2-1)x = e^{t+2}$$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2-1}e^{t+2} \\ &= e^{t+2}\frac{1}{(D+1)^2-1}1 \\ &= e^{t+2}\frac{1}{D^2+2D}1 \\ &= e^{t+2}\frac{1}{D(D+2)}1 \\ &= e^{t+2}\frac{1}{2D\left(1+\dfrac{D}{2}\right)}1 \\ &= \frac{1}{2}e^{t+2}\frac{1}{D}\left(1-\frac{D}{2}+\cdots\right)1 \\ &= \frac{1}{2}e^{t+2}\frac{1}{D}1 \\ &= \frac{1}{2}e^{t+2}t = \frac{1}{2}te^{t+2} \end{aligned}$$

（3）　特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ を解くと，$\lambda=2$（重解）であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = (C_1+C_2t)e^{2t} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}\cdots$① の 1 つの解を求める．

e^{2t}，te^{2t} は，いずれも①の一般解に含まれるので，1 つの解を

$x = At^2e^{2t}$ と予想する．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(2te^{2t}+t^2\cdot 2e^{2t}) \\ &= 2A(t^2+t)e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2A\{(2t+1)e^{2t}+(t^2+t)\cdot 2e^{2t}\} \\ &= 2A(2t^2+4t+1)e^{2t} \end{aligned}$$

これらを，①に代入すると

$$2A(2t^2+4t+1)e^{2t} - 4\cdot 2A(t^2+t)e^{2t} + 4At^2e^{2t} = e^{2t}$$

$$2Ae^{t+2} = e^{t+2}$$

よって，$2A=1$ であるから，$A=\dfrac{1}{2}$

したがって，①の 1 つの解は

$$x = \frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = -2\sin 2t\cdots$② の 1 つの解を求める．

②の 1 つの解を

$x = A\cos 2t + B\sin 2t$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

これらを，②に代入すると

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t - 4(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + 4(A\cos 2t + B\sin 2t) = -2\sin 2t$$

$$-8B\cos 2t + 8A\sin 2t = -2\sin 2t$$

よって，$-8B = 0$，$8A = -2$ であるから，$A = -\dfrac{1}{4}$，$B = 0$

したがって，②の 1 つの解は

$$x = -\frac{1}{4}\cos 2t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - \frac{1}{4}\cos 2t + (C_1 + C_2t)e^{2t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕

①は，$(D^2 - 4D + 4)x = e^{2t}$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2 - 4D + 4}e^{2t} \\ &= e^{2t}\frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 4}1 \\ &= e^{2t}\frac{1}{D^2}1 \\ &= e^{2t}\frac{1}{D}t \\ &= e^{2t}\cdot\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t^2e^{2t} \end{aligned}$$

②は，$(D^2 - 4D + 4)x = -2\sin 2t$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{D^2 - 4D + 4}\sin 2t \\ &= -\frac{2}{(D^2+4) - 4D}\sin 2t \\ &= -\frac{2\{(D^2+4) + 4D\}}{(D^2+4)^2 - 16D^2}\sin 2t \\ &= -\frac{2\{(-4+4) + 4D\}}{(-4+4)^2 - 16\cdot(-4)}\sin 2t \\ &= -\frac{D}{8}\sin 2t = -\frac{1}{8}D\sin 2t \\ &= -\frac{1}{8}\cdot 2\cos 2t = -\frac{1}{4}\cos 2t \end{aligned}$$

2. (1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2At + B)e^t + (At^2 + Bt)e^t \\ &= \{At^2 + (2A+B)t + B\}e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (2At + B)e^t \\ &\quad + \{At^2 + (2A+B)t + B\}e^t \\ &= \{At^2 + (4A+B)t + 2A + 2B\}e^t \end{aligned}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} &\{At^2 + (4A+B)t + 2A + 2B\}e^t \\ &\quad - 4\{At^2 + (2A+B)t + B\}e^t \\ &\quad + 3(At^2 + Bt)e^t = te^t \end{aligned}$$

$$-4Ate^t + 2A - 2B = te^t$$

よって

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$A = -\dfrac{1}{4}$，$B = -\dfrac{1}{4}$

よって，1 つの解は，$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{4}(t^2 + t)e^t}$

※　微分演算子を利用すると

与えられた微分方程式は

$$(D^2 - 4D + 3)x = te^t$$

と表せるので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D^2 - 4D + 3}te^t \\ &= e^t\frac{1}{(D+1)^2 - 4(D+1) + 3}t \\ &= e^t\frac{1}{D^2 - 2D}t \\ &= e^t\frac{1}{D(D-2)}t \\ &= e^t\frac{1}{-2D\left(1 - \dfrac{D}{2}\right)}t \\ &= -\frac{1}{2}e^t\frac{1}{D}\left(1 + \frac{D}{2} + \cdots\right)t \\ &= -\frac{1}{2}e^t\frac{1}{D}\left(t + \frac{1}{2}\cdot 1\right) \\ &= -\frac{1}{2}e^t\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right) \\ &= -\frac{1}{4}(t^2 + t)e^t \end{aligned}$$

(2)　特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ を解くと，$\lambda = 1,\ 3$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{3t} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

以上より，一般解は

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{4}(t^2 + t)e^t + C_1e^t + C_2e^{3t}}$$

(C_1，C_2は任意定数)

3. (1)　$u = \log t$ より，$t = e^u$，$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{du}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{du} + \frac{1}{t}\frac{d^2x}{du^2}\frac{du}{dt} \\ &= \frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{du^2} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{du} \end{aligned}$$

これらを与えられた方程式に代入すると

$$\begin{aligned} &t^2\left(\frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{du^2} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{du}\right) \\ &\qquad + at\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{du}\right) + bx = R(e^u) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2x}{du^2} + (a-1)\frac{dx}{du} + bx = R(e^u)$$

これは，定数係数の 2 階線形微分方程式である．

（2）　（1）において，$a=1$，$b=-1$，$R(t)=8t^3$ であるから，$u=\log t$ とすれば，与えられた微分方程式は

$$\frac{d^2x}{du^2}+(1-1)\frac{dx}{du}-1\cdot x=8(e^u)^3$$

$$\frac{d^2x}{du^2}-x=8e^{3u}\cdots①$$

特性方程式 $\lambda^2-1=0$ を解くと，$\lambda=\pm1$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x=C_1e^u+C_2e^{-u}\quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

①の 1 つの解を

$x=Ae^{3u}$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt}=3Ae^{3u}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=9Ae^{3u}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$9Ae^{3u}-Ae^{3u}=8e^{3u}$$

$$8Ae^{3u}=8e^{3u}$$

よって，$8A=8$ であるから，$A=1$

したがって，1 つの解は

$$x=e^{3u}$$

以上より，$x=e^{3u}+C_1e^u+C_2e^{-u}$ であるから，求める一般解は

$$\begin{aligned}x&=e^{3\log t}+C_1e^{\log t}+C_2e^{-\log t}\\&=e^{\log t^3}+C_1e^{\log t}+C_2e^{\log t^{-1}}\\&=t^3+C_1t+C_2t^{-1}\\&=\boldsymbol{t^3+C_1t+\frac{C_2}{t}}\end{aligned}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

〔①の特殊解の求め方の別解〕

①は，$(D^2-1)x=8e^{3u}$

と表せるので

$$\begin{aligned}x&=\frac{8}{D^2-1}e^{3u}\\&=\frac{8}{3^2-1}e^{3u}=e^{3u}\end{aligned}$$

■